ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

F.4
МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Alexander Sudnitson
Tallinn University of Technology

F.4.1. Постановка задчи минимизации

Задача минимизации булевой функции заключается в том, чтобы найти оптимальное по некоторому критерию (обычно наиболее компактное) её представление в виде суперпозиции элементарных булевых функций, составляющих некоторую функционально полную систему. Наиболее детально эта задача исследована в *классе нормальных форм* (ДНФ или КНФ) – для случая функционально полной системы, состоящей из дизъюнкции конъюнкции и отрицания.

При изучении задачи минимизации мы *сосредаточимся на классе ДНФ*, учитывая, что переход к решению в классе КНФ, учитывая принцип двойственности, не должен вызвать принципиальных трудностей.

F.4.2 Алгебраическое упрощение ДНФ

В принципе, упрощение ДНФ может быть выполнено путём эквивалентных алгебраических преобразований.

Рассмотрим 3 основные операции, которые могут быть использованы для локального упрощения ДНФ.

1. *Поглощение*.
Даны две элементарные конъюнкции k_i и $k_i k_j$ (во вторую конъюнкцию входят все литералы первой). Тогда

$$k_i \vee k_i k_j = k_i$$

Действительнно

$$k_i \vee k_i k_j = k_i (1 \vee k_j) = k_i 1 = k_i$$

Говорят, что $k_i \ k_j$ ***поглощается*** эл. конъюнкцией k_i .

Пример: $x_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 = x_1 x_2$

Локальное упрощение ДНФ (склеивание)

2. *Склеивание*.
Даны две элементарные конъюнкции xk_i и $\bar{x}k_i$, т.е. они различаются ***в*** *точности* по одному литералу (переменная в одном случае без отрицания, а в другом – с отрицанием). Тогда

$$x k_i \vee \bar{x} k_i = k_i$$

Действительнно

$$x k_i \vee \bar{x} k_i = k_i (x \vee \bar{x}) = k_i 1 = k_i$$

Говорят, что $x\, k_i$ и $\bar{x} k_i$ ***склеиваются*** по переменной x.
Кроме того эти элементарные конъюнкции являются *соседними* и они *ортогональны* по единственной переменной.

Пример: $x_1 x_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 = x_2 x_3 x_4$

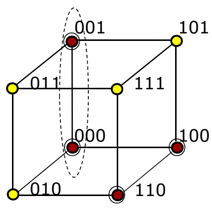
Иллюстрация применения оп-и склеивания

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$$

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 (x_3 \vee \bar{x}_3) \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$$

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & - \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$



Локальное упрощение ДНФ

3. *Удаление литерала*.
Даны две элементарные конъюнкции x и $\bar{x}k_i$ (одна из эл. конъюнкций состоит из одного литерала, в другую входит литерал противоположный первому, но от той же переменной). Тогда

$$x \vee \bar{x} k_i = x \vee k_i$$

Действительнно

$$x \vee \bar{x} k_i = x\, 1 \vee x k_i = x (k_i \vee \bar{k}_i) \vee \bar{x} k_i = x k_i \vee x \bar{k}_i \vee \bar{x} k_i =$$

$$= (x k_i \vee x \bar{k}_i) \vee (x k_i \vee \bar{x} k_i) = x (k_i \vee \bar{k}_i) \vee k_i (x \vee \bar{x}) = x \vee k_i$$

Пример: $x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 = x_1 \vee x_2 x_3 x_4$

Приёмы локального упрощения ДНФ

Дублирование элементарных конъюнкций

$$k_i = k_i \vee k_i$$

<u>Пример.</u>

Дана ДНФ: $\bar{x}_1 \; x_2 \; x_3 \vee x_1 \; x_2 \; \bar{x}_3 \vee x_1 \; \bar{x}_2 \; x_3 \vee x_1 \; x_2 \; x_3$

$$\bar{x}_1 \; x_2 \; x_3 \vee x_1 \; x_2 \; x_3 \vee x_1 \; x_2 \; \bar{x}_3 \vee x_1 \; x_2 \; x_3 \vee x_1 \; \bar{x}_2 \; x_3 \vee x_1 \; x_2 \; x_3 =$$

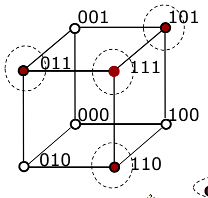
$$= x_2 \; x_3 (\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_1 \; x_2 (\bar{x}_3 \vee x_3) \vee x_1 \; x_3 (\bar{x}_2 \vee x_2) =$$

$$= x_2 \; x_3 \vee x_1 \; x_2 \vee x_1 \; x_3$$

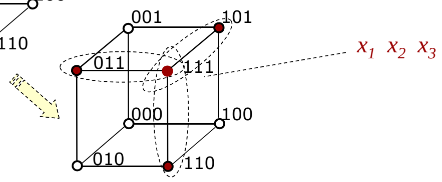
Иллюстрация применения дублирования

$$\bar{x}_1 \; x_2 \; x_3 \vee x_1 \; x_2 \; x_3 \vee x_1 \; \bar{x}_2 \; x_3 \vee x_1 \; x_2 \; x_3 \vee x_1 \; x_2 \; \bar{x}_3 \vee x_1 \; x_2 \; x_3$$

$$\bar{x}_1 \; x_2 \; x_3 \vee x_1 \; \bar{x}_2 \; x_3 \vee x_1 \; x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \; x_2 \; x_3$$



$$x_2 \; x_3 \vee x_1 \; x_3 \vee x_1 \; x_2$$



Приёмы локального упрощения ДНФ

Дизъюнктивное разложение эл. конъюнкций по одной и более отсутствующих в них переменным

<u>Пример.</u>

$$v\,x\,y \vee \bar{v}\,\bar{z} \vee x\,y\,\bar{z} = v\,x\,y \vee \bar{v}\,\bar{z} \vee (\bar{v}\,x\,y\,\bar{z} \vee v\,x\,y\,\bar{z}) =$$
$$= (v\,x\,y \vee v\,x\,y\,\bar{z}) \vee (\bar{v}\,\bar{z} \vee \bar{v}\,x\,y\,\bar{z}) = v\,x\,y \vee \bar{v}\,\bar{z}$$

Здесь по переменной *v* расщепляется последняя эл. конъюнкция в исходной ДНФ.

F.4.3. Минимальная ДНФ и этапы её поиска

В классе ДНФ задача минимизации заключается в том, что надо найти такую ДНФ для заданной булевой функции, которая содержала бы минимальное число букв (литералов). В результате мы получаем так называемую *минимальную ДНФ* (МДНФ).

В рассматриваемых нами методах решения задачи нахождения МДНФ можно выделить два этапа:

- Получение множества всех простых импликант.
- Выделение из него некоторого подмножества, которое и будет представлять решение (задача покрытия).

Далее мы рассмотрим последовательно эти этапы и основные понятия необходимые для решения задачи минимизации.

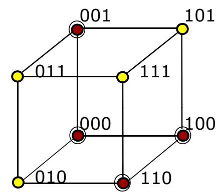
Исходное задание минимизируемой фун-и

Мы полагаем, что задана *полностью опрнделённая* булева функция *f*. Причем исходным заданием является ее СДНФ, которая может быть задана геометрически посредством указания характеристического множества, т.е. однозначно определяющего конкретную булеву функцию, например, путём представления «единичных» наборов аргументов этой функции посредством двоичной матрицы.

Пример1: функция от 3-х аргументов

$$\bar{x}_1 \, \bar{x}_2 \, x_3 \vee \bar{x}_1 \, \bar{x}_2 \, \bar{x}_3 \vee x_1 \, \bar{x}_2 \, \bar{x}_3 \vee x_1 \, x_2 \, \bar{x}_3$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$



1	1	0	0
1	0	0	1

x_1

x_2

x_3

F.4.4. Простые импликанты.

Говорят, что формула (булева функция) *A* имплицирует формулу *B* (*A*⇒*B*), если формула *B* принимает значение 1 всюду, где принимает значение 1 формула *A*. Другими словами множество возможных значений переменных, при которых *A* равна 1, является подмножеством возможных значений переменных, при которых *B* тоже равна 1.

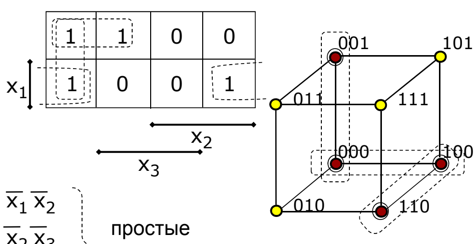
Например, $a \,\&\, b \Rightarrow a \vee b$

Простой импликантой булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется такая элементарная конъюнкция k, которая имплицирует функцию f, но не будет ее имплицировать при удалении из k любого символа.

Дизъюнкция всех простых импликант называется *сокращенной ДНФ.*

Пример: простые импликанты и сокр. ДНФ

0	0	1
0	0	0
1	0	0
1	1	0



0	0	-	$\bar x_1 \bar x_2$
-	0	0	$\bar x_2 \bar x_3$
1	-	0	$x_1 \bar x_3$

простые импликанты

$$\underbrace{\bar x_1 \bar x_2 \vee \bar x_2 \bar x_3 \vee x_1 \bar x_3}_{\text{сокращённая ДНФ}}$$

F.4.5. Основная теорема минимизации

<u>ТЕОРЕМА</u>. Любая минимальная ДНФ состоит только из простых импликант.

Таким образом при решении задачи нахождения минимальной ДНФ надо предварительно найти множество всех простых импликант заданной булевой функции, что и является первым этапом в классических методах минимизации, который опирается на следующую теорему.

<u>ТЕОРЕМА КВАЙНА</u>. Если в СДНФ булевой функции выполнить все операции неполного склеивания, а затем все операции поглощения, то получится сокращённая ДНФ этой функции, т.е дизъюнкция всех её простых импликант.

F.4.6. Поиск простых импликант по Квайну

Формально метод Квайна основан *во-первых* на применении операции т. н. *неполного склеивания*

$$x k \vee \bar x k = k \vee x k \vee \bar x k$$

т.е. после применении операции склеивания в правой части тождества остаются оба терма участвовавшие в склеивании (отсюда слово «неполного»)

Во-вторых в соответствии с процедурой минимизации применяется *операция поглощения*

$$(F \,\&\, G) \vee G = G$$

Пример 1: получение простых импликант

$$\bar x_1 \bar x_2 x_3 \vee \bar x_1 \bar x_2 \bar x_3 \vee x_1 \bar x_2 \bar x_3 \vee x_1 x_2 \bar x_3$$

$\bar x_1 \bar x_2 x_3$
$\bar x_1 \bar x_2 \bar x_3$
$x_1 \bar x_2 \bar x_3$
$x_1 x_2 \bar x_3$

Применив все возможные неполные склеивания получаем следующее множество элементарных конъюнкций

$\bar x_1 \bar x_2$
$\bar x_2 \bar x_3$
$x_1 \bar x_3$
$\bar x_1 \bar x_2 x_3$
$\bar x_1 \bar x_2 \bar x_3$
$x_1 \bar x_2 \bar x_3$
$x_1 x_2 \bar x_3$

Пример 1: Сокращённая ДНФ

$\bar x_1 \bar x_2$
$\bar x_2 \bar x_3$
$x_1 \bar x_3$
$\bar x_1 \bar x_2 x_3$
$\bar x_1 \bar x_2 \bar x_3$
$x_1 \bar x_2 \bar x_3$
$x_1 x_2 \bar x_3$

Выполнив все возможные поглощения получаем все простые импликанты, дизъюнкция которых даёт сокращённую ДНФ

$\bar x_1 \bar x_2$
$\bar x_2 \bar x_3$
$x_1 \bar x_3$

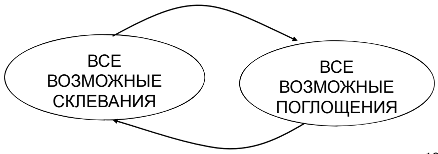
$$\bar x_1 \bar x_2 \vee \bar x_2 \bar x_3 \vee x_1 \bar x_3$$

сокращённая ДНФ

Здесь мы выполнили только 1-ый этап минимизации. Минимальную ДНФ для нашей функции мы получим лишь после выполнения 2-го этапа минимизации.

Процедура поиска всех простых импликант

По Квайну сначала склеиваются все исходные конъюнкции (ранга ***n***), находящиеся в отношении соседства. После завершения этой операции производятся все возможные поглощения. Затем склеиваются все соседние конъюнкции ранга ***n-1***, после чего опять выполняются операции поглощения. Так повторяется до тех пор, пока на очередном этапе не окажется, что в преобразуемой ДНФ не существует уже таких конъюнкций, которые находятся в отношении соседства или поглощения. Таким образом будут найдены ***все** простые импликанты* (сокращенная ДНФ).



19

F.4.7. Безызбыточная ДНФ

Иногда при решении задачи минимизации ограничиваются поиском т.н. *безызбыточной ДНФ*. Безызбыточной будет ДНФ, из которой нельзя (не изменив при этом представленную функцию) выбросить ни одной элементарной конъюнкции и ни одной буквы (литерала) из входящих в нее элементарных конъюнкций.

Очевидно, что и безызбыточная ДНФ тоже состоит только из простых импликант.

Важно понимать, что безызбыточная ДНФ вовсе не обязательно будет минимальной ДНФ, хотя может быть и достаточно близка к ней по нашему критерию оптимальности.

МДНФ всегда является безызбыточной.

20

F.4.7. Векторная интерпретция МакКласки

С целью упрощения и большей эффективности вычислений МакКласки усовершенствовал метод Квайна.

Принципиальным является то, что операции склеивания и поглощения интерпретируются над троичными векторами (множества M^1), представляющими интервалы (кубы) булева пространства аргументов (булевых переменных) и соответствующие им элементарные конъюнкции.

В булевом пространстве простой импликантой будет один из максимальных интервалов (кубов), включающий в себя (покрывающий) «единичные» точки, но не содержащий ни одной «нулевой» точки.

Очевидно, что при поиске простейших ДНФ достаточно ограничиться рассмотрением только таких максимальных кубов (чем больше «черточек» в кубе, тем меньше букв в сооттветствующей эл. конъюнкции).

21

Геометрическая интерпреция поиска МДНФ

Первый этап минимизации сводится к поиску всех максимальных интервалов, из которых затем, на втором этапе, выбирается их оптимальная совокупность.

Подчеркнём, что на первом этапе мы *все* максимальные кубы, чтобы не упустить ни одной возможности выбора на втором этапе поиска МДНФ.

Таким образом нашей постановке задачи минимизации при геометрическом задании булевой функции соответствует поиск некоторой троичной матрицы с минимальным числом строк и в то же время – с минимальным совокупным числом 1 и 0 (с максимальным числом «черточек»). Другими словами надо найти минимальное число максималных интервалов (кубов) булева пространства (второй этап минимизации), покрывающих в своей совокупности все «единичные» точки, но ни одной «нулевой» точки в булевом пространстве.

22

От СДНФ к МДНФ (как цель)

$$M^1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow M^1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & - \\ - & 0 & 1 & 1 \\ - & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & - \end{Vmatrix}$$

23

Отношения между троичными векторами

Сформулируем отношения, в которых могут находиться троичные вектора (интервалы).

Векторы ***ортогональны***, если в некоторой паре одноименных компонент один из этих векторов имеет значение 0, а другой – значение 1.

Если при этом, значения остальных компонент попарно равны, то эти векторы находятся в ***отношении соседства***.

Например,

векторы 1 0 – 1 / 1 1 0 0 — ортоганальны, но соседними не являются

векторы 1 0 - 1 / 1 1 - 1 — не только ортоганальны, но и соседние

24

Отношения между троичными векторами

Более общим является ***отношение смежности***: векторы смежны, если они ортогональны ровно по одной компоненте.

Например,

векторы 1 0 – 1, 1 1 0 0 — ортоганальны, но смежными не являются

векторы 1 0 – 1, 1 1 0 1 — смежные

Отношение поглощения: вектор ***u*** поглощает вектор ***v***, если значения его компонент, отличные от « **-** » совпадают со значениями одноименных компонент вектора ***v***.

Например, вектор 0 – – 1 поглощает вектор 0 1 – 1

Геометрическая интерпретация операций

Будем далее при решении задачи минимизации рассматривать ДНФ булевой функции в виде троичной (в частностном случае, исходном, СДНФ – двоичной) матрицы. Если у этой матрицы существует пара соседних строк, то их можно «склеить» образовав новую строку, соответствующую продукту склевания. Добавление в матрицу получаемой новой строки является операцией склеивания. Операцией поглощения является удаление из матрицы некоторой строки, поглощаемой какой-либо из других строк этой матрицы.

Сокращение перебора при поиске пр. им-т

0 0 1 ↔ 1
0 0 0 ↔ 0
1 0 0 ↔ 1
1 1 0 ↔ 2

Для сокращения перебора пар интервалов (конъюнкций), проверки свойства их ортогональности вся их совокупность подразделяется на группы по числу единиц в их записи. Тогда достаточно сравнивать попарно лишь элементы соседних групп (в данном примере имеем 3 группы).

(0) 0 0 0
----
(1) 0 0 1
(4) 1 0 0
----
(6) 1 1 0

(0/1) 0 0 - ⟷ $\bar{x}_1 \bar{x}_2$
(0/4) - 0 0 ⟷ $\bar{x}_2 \bar{x}_3$

(4/6) 1 - 0 ⟷ $x_1 \bar{x}_3$

простые импликанты

десятичный эквивалент двоичного числа соответствущего набору аргументов

Обязательные импликанты

До сих пор мы рассматривали построение сокращённой ДНФ (поиск всех простых импликант). Второй этап минимизации заключается в переходе от сокращённой ДНФ к минимальной ДНФ. Этот переход можно представить себе как вычёркивание максимального числа термов (простых импликант) из сокращённой ДНФ, но с тем условием, что оставшиеся импликанты образуют формулу описывающую исходную функцию.

Наметим путь решения поставленной задачи, которая является принципиально сложной комбинаторной задачей. Первым делом введём понятие обязательного (существенного) импликанта.

Обязателным будет импликант, который в любом случае будет присутствовать в минимальной ДНФ.

Пример 1: обязательные импликанты

			000	001	100	110
обязательный импликант	$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	0 0 -	1	1	0	0
	$\bar{x}_2 \bar{x}_3$	- 0 0	1	0	1	0
обязательный импликант	$x_1 \bar{x}_3$	1 - 0	0	0	1	1

Обязательный - значит без него не обойтись - он войдёт в любую МДНФ

Матрица показывает какие единичные точки принадлежат соответствующему интервалу

Пример 1: сокращённая и минимальная ДНФ

$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_3$

сокращённая ДНФ

			000	001	100	110
обязательный импликант	$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	0 0 -	1	1	0	0
	$\bar{x}_2 \bar{x}_3$	- 0 0	1	0	1	0
обязательный импликант	$x_1 \bar{x}_3$	1 - 0	0	0	1	1

$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3$

минимальная (кратчайшая) ДНФ

Пример 1: поиск минимального покрытия

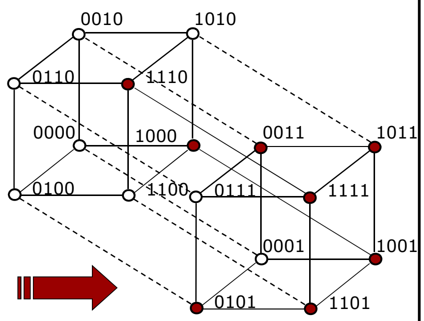
		000	001	100	110
обязательный импликант	0 0 -	1	1	0	0
	- 0 0	1	0	1	0
	1 - 0	0	0	1	1

		100	110
	- 0 0	1	0
обязательный импликант	1 - 0	1	1

В результате имеем, что все единичные точки покрыты двумя максимальными интервалами (кубами), которые образуют минимальное покрытие

Пример 2: функция от 4-х аргументов

$$M^1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$



Генерация всех простых импликант (пример)

Исходным является является множество всех 0-кубов соответствующих конституентам заданной функции

(8) 1 0 0 0
(9) 1 0 0 1
(3) 0 0 1 1
(5) 0 1 0 1
(11) 1 0 1 1
(13) 1 1 0 1
(14) 1 1 1 0
(15) 1 1 1 1

Шаг 1.

Находим все возможные 1-кубы соответствующие парам ортогональных векторов (или заданным 0-кубам) представляющим наборы аргументов, на которых функция равна единице.

1 0 0 - (8/9)
1 0 - 1 (9/11)
1 - 0 1 (9/13)
- 0 1 1 (3/11)
- 1 0 1 (5/13)
1 - 1 1 (11/15)
1 1 - 1 (13/15)
1 1 1 - (14/15)

Генерация всех простых импликант (пример)

Шаг 2.

Выполняем все возможные поглощения. В данном примере все исходные 0-кубы поглощаются найденными на предыдущем шаге 1-кубами, т.е. ни один из 0-кубов не образует простого импликанта.

1 0 0 - (8/9)
1 0 - 1 (9/11)
1 - 0 1 (9/13)
- 0 1 1 (3/11)
- 1 0 1 (5/13)
1 - 1 1 (11/15)
1 1 - 1 (13/15)
1 1 1 - (14/15)

Множество кубов исходное для следующего “шага склеиваний”.

Генерация всех простых импликант (пример)

1 0 0 - (8/9)
1 0 - 1 (9/11)
1 - 0 1 (9/13)
- 0 1 1 (3/11)
- 1 0 1 (5/13)
1 - 1 1 (11/15)
1 1 - 1 (13/15)
1 1 1 - (14/15)

Шаг 3.

Находим все возможные 2-кубы соответствующие парам ортогональных векторов (1-кубов) полученных на предыдущем шаге (применив к ним операцию склевания).

1 - - 1 (9/11/13/15)
1 - - 1 (9/13/11/15)

Генерация всех простых импликант (пример)

1 0 0 - (8/9)
1 - - 1 (9/11/13/15)
1 - - 1 (9/13/11/15)
- 0 1 1 (3/11)
- 1 0 1 (5/13)
1 - 1 1 (11/15)
1 1 - 1 (13/15)
1 1 1 - (14/15)

Шаг 4.

Выполняем все возможные поглощения на множестве кубов полученных на двух последних шагах “склеивания”.

1 0 0 - (8/9)
- 0 1 1 (3/11)
- 1 0 1 (5/13)
1 1 1 - (14/15)
1 - - 1 (9/11/13/15)

Останов первого этапа минимизации

1 0 0 - (8/9)
- 0 1 1 (3/11)
- 1 0 1 (5/13)
1 1 1 - (14/15)

1 - - 1 (9/11/13/15)

Поскольку следующиший “шаг склеиваний” невозможен, то оставшееся множество кубов соответствует множеству всех простых импликант минимизируемой функции. Их дизъюнкция образует сокращённую ДНФ:

$$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_2}x_3x_4 \vee x_2\overline{x_3}x_4 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_4$$

37

Сводная таблица построения мн-ва пр. им-т

(8) ~~1 0 0 0~~	1 0 0 - (8/9)	
(9) ~~1 0 0 1~~	~~1 0 - 1~~ (9/11)	1 - - 1 (9/11/13/15)
(3) ~~0 0 1 1~~	~~1 - 0 1~~ (9/13)	~~1 - - 1~~ (9/13/11/15)
(5) ~~0 1 0 1~~	- 0 1 1 (3/11)	
(11) ~~1 0 1 1~~	- 1 0 1 (5/13)	
(13) ~~1 1 0 1~~	~~1 - 1 1~~ (11/15)	
(14) ~~1 1 1 0~~	~~1 1 - 1~~ (13/15)	
(15) ~~1 1 1 1~~	1 1 1 - (14/15)	

38

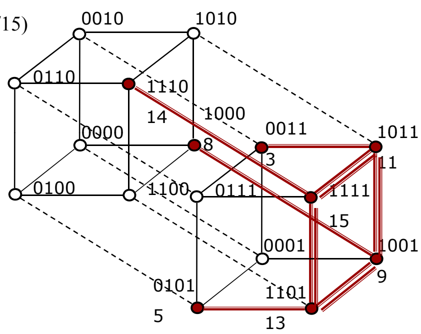
Пошаговое изменение покрывающего мн-ва

(8) 1 0 0 0	1 0 0 - (8/9)	1 0 0 - (8/9)
(9) 1 0 0 1	1 0 - 1 (9/11)	1 - - 1 (9/11/13/15)
(3) 0 0 1 1	1 - 0 1 (9/13)	- 0 1 1 (3/11)
(5) 0 1 0 1	- 0 1 1 (3/11)	- 1 0 1 (5/13)
(11) 1 0 1 1	- 1 0 1 (5/13)	1 1 1 - (14/15)
(13) 1 1 0 1	1 - 1 1 (11/15)	
(14) 1 1 1 0	1 1 - 1 (13/15)	
(15) 1 1 1 1	1 1 1 - (14/15)	

39

Иллюстрация найденной совокупности кубов

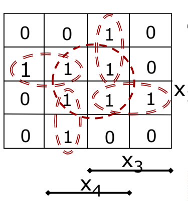
1 0 0 - (8/9)
1 - - 1 (9/11/13/15)
- 0 1 1 (3/11)
- 1 0 1 (5/13)
1 1 1 - (14/15)

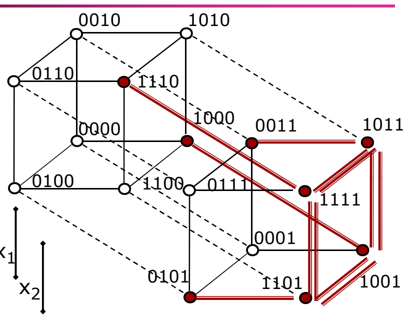


40

Сокр. ДНФ и её различное представление

1 0 0 -
1 - - 1
- 0 1 1
- 1 0 1
1 1 1 -





$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1x_4 \vee \overline{x_2}x_3x_4 \vee x_2\overline{x_3}x_4 \vee x_1x_2x_3$

41

F.4.8. Второй этап минимизации

Строится *импликантная матрица* (таблица Квайна) ***K***. Это бинарная матрица, задающая бинарное отношение включения между конституентами минимизируемой функции (соответствуют столбцам матрицы) и найденными простыми импликантами (соответствуют строкам матрицы).

	1000	1001	0011	0101	1011	1101	1110	1111
1 0 0 -	1	1	0	0	0	0	0	0
1 - - 1	0	1	0	0	1	1	0	1
- 0 1 1	0	0	1	0	1	0	0	0
- 1 0 1	0	0	0	1	0	1	0	0
1 1 1 -	0	0	0	0	0	0	1	1

k (i, j) = 1, если ***j*** -тый конституент имплицирует ***i*** -тый простой импликант. В противном случае *k (i, j) = 0*.

42

Задача покрытия

Задача построения МДНФ (выбора необходимого множества простых импликант) сводится к выбору минимального числа строк так, чтобы в выбранной совокупности в каждом столбце встречалась хотя бы одна единица (выбранные интервалы покрывают все единичные точки и только их).

Сформулированная задача является одной из интерпретаций задачи о покрытии множеств. Эта задача является классической, сложной комбинаторной проблемой. Точное её решение весьма трудоёмко и на практике не всегда возможно.

Мы рассмотрим только очевидные элементы её решения. Более полное рассмотрение задачи покрытия выходит за рамки нашего курса.

Обязательный импликант (пример)

$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ [1 0 0 -] есть обязательный импликант (импликант входящий в любую МДНФ), т.к. только он покрывет единичную точку (коституент) [1 0 0 0].

	1000	1001	0011	0101	1011	1101	1110	1111
1 0 0 -	1	1	0	0	0	0	0	0
1 - - 1	0	1	0	0	1	1	0	1
- 0 1 1	0	0	1	0	1	0	0	0
- 1 0 1	0	0	0	1	0	1	0	0
1 1 1 -	0	0	0	0	0	0	1	1

Решение задачи покрытия (пример - шаг 1)

Включаем этот импликант в строимое множество простых импликант включаемых в МДНФ и редуцируем (упрощаем) матрицу.

	1000	1001	0011	0101	1011	1101	1110	1111
1 0 0 -	1	1	0	0	0	0	0	0
1 - - 1	0	1	0	0	1	1	0	1
- 0 1 1	0	0	1	0	1	0	0	0
- 1 0 1	0	0	0	1	0	1	0	0
1 1 1 -	0	0	0	0	0	0	1	1

$\{ x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \}$

Решение задачи покрытия (пример)

$\bar{x}_2 x_3 x_4$ [- 0 1 1] есть обязательный импликант

	0011	0101	1011	1101	1110	1111
1 - - 1	0	0	1	1	0	1
- 0 1 1	1	0	1	0	0	0
- 1 0 1	0	1	0	1	0	0
1 1 1 -	0	0	0	0	1	1

Решение задачи покрытия (пример - шаг 2)

Включаем этот импликант в строимое множество простых импликант включаемых в МДНФ и редуцируем (упрощаем) матрицу.

	0011	0101	1011	1101	1110	1111
1 - - 1	0	0	1	1	0	1
- 0 1 1	1	0	1	0	0	0
- 1 0 1	0	1	0	1	0	0
1 1 1 -	0	0	0	0	1	1

$\{ x_1\bar{x}_2\bar{x}_3,\ \bar{x}_2 x_3 x_4 \}$

Решение задачи покрытия (пример - шаг 3)

$x_2\bar{x}_3 x_4$ [- 1 0 1] есть обязательный импликант

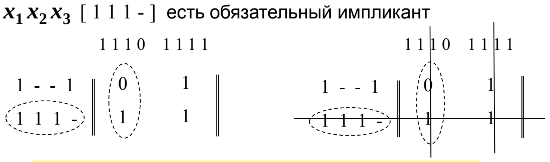
	0101	1101	1110	1111
1 - - 1	0	1	0	1
- 1 0 1	1	1	0	0
1 1 1 -	0	0	1	1

Включаем этот импликант в строимое множество членов МДНФ и редуцируем (упрощаем) матрицу.

	0101	1101	1110	1111
1 - - 1	0	1	0	1
- 1 0 1	1	1	0	0
1 1 1 -	0	0	1	1

Останов алгоритма поиска покрытия

$x_1 x_2 x_3$ [1 1 1 -] есть обязательный импликант



$\{ x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3},\ \overline{x_2} x_3 x_4,\ x_2 \overline{x_3} x_4,\ x_1 x_2 x_3 \}$

[1 0 0 -] [- 0 1 1] [- 1 0 1] [1 1 1 -]

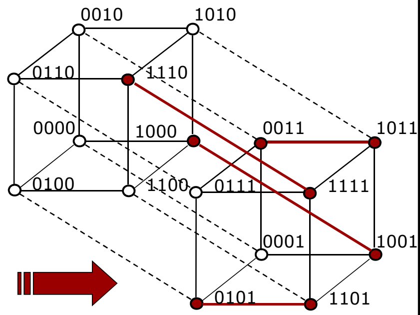
В результате очередного редуцирования получили в остатке пустое множество столбцов, т. е. все единичные точки покрыты 4-мя интервалами и соответствующая МДНФ (она же кратчайшая) будет:

$x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_2} x_3 x_4 \vee x_2 \overline{x_3} x_4 \vee x_1 x_2 x_3$

49

Пример 2: иллюстрация решения

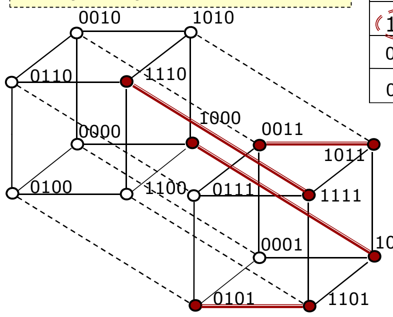
$$M^1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$



50

Различные интерпретации МДНФ (пример 2)

$x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_2} x_3 x_4 \vee x_2 \overline{x_3} x_4 \vee x_1 x_2 x_3$



0	0	1	0
1	1	1	0
0	1	1	1
0	1	0	0

x_1 x_2 x_3 x_4

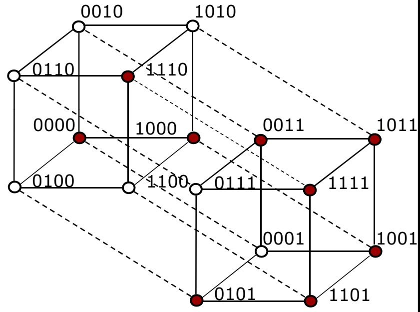
$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & - \\ - & 0 & 1 & 1 \\ - & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & - \end{Vmatrix}$$

51

Пример 3 - (требуется дать ответ)

Как изменится решение в случае функции отличающейся от предыдущей (пример 2) тем, что в M^1 добавлен < 0 0 0 0 >?

$$M^1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$



52

Замечания к решению задачи покрытия

Включение обязательных импликант в искомую МДНФ является очевидным шагом в решении задачи минимизации. Если после этого редуцированная матрица не становится вырожденной, то дальнейшее решение задачи поиска минимального покрытия, в общем случае, *есть принципиально сложная кобинаторная прблема* требующая отдельного изучения.

Мы будем исходить из того, что при нескольких вариантах выбора мы не будем забывать , что предпочтение отдаётся варианту покрытия с минимальным суммарным числом в простых импликантах, обрзующих покрытие. При этом может появиться и несколько равноценных решений.

53

F.4.9. Метод карт Карно

Правила минимизации:

- $\mathbf{2^i}$ смежных клеток, расположенных в виде прямоугольника, соответствуют одной элементарной конъюнкции, ранг (число литерал) которой меньше ранга конституенты единиц. Чем больше клеток в выделенной группе, тем проще выражаемый ею импликант логической функции.
- В любой карте Карно соседними клетками, к которым можно применить правило склеивания, являются не только смежные клетки, но и клетки находящиеся на противоположных концах любой строки и любого столбца.

54

Процесс минимизации (карты Карно)

Таким образом, процесс минимизации сводится к нахождению наиболее крупных групп из 2^i соседних единичных клеток. Причем каждая из единичных клеток должна входить в некоторую группу (блок, контур), а общее количество таких максимальных групп должно быть минимально.

Простой импликант соответствующий максимальному блоку будет содержать в себе символы тех переменных, значения истинности которых совпадают у всех объединенных клеток.

55

Минимизация в классе ДНФ

Закон склеивания: $(F \& x) \vee (F \& \bar{x}) = F$

Закон поглощения: $(F \& G) \vee G = G$

0	1	1	0
0	0	0	0

x_1, x_2, x_3

0 0 1
0 1 1 → 0 - 1

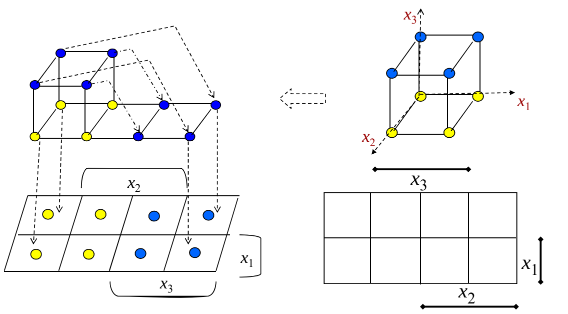
$\bar{x}_1 \& x_3$

$\bar{x}_1 \& x_3$

$(\bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \& x_3) \vee (\bar{x}_1 \& x_2 \& x_3) = \bar{x}_1 \& x_3$

56

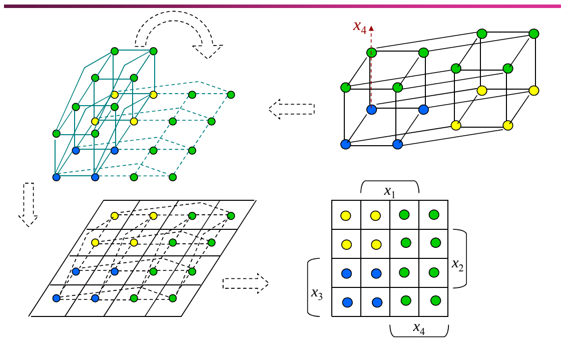
Карта Карно для функции от 3-х аргументов



Карта Карно есть двумерная развёртка гиперкуба.

57

Карта Карно для функции от 4-х аргументов



Карта Карно есть двумерная развёртка гиперкуба.

58

Пример 4: бул. функция от 4-х аргументов

$$M^1 = \left\| \begin{matrix} 1&0&0&0 \\ 1&0&0&1 \\ 1&0&1&1 \\ 0&0&1&1 \\ 0&1&0&1 \\ 1&1&0&1 \\ 1&1&1&1 \\ 1&1&1&0 \end{matrix} \right\|$$

$x_1 x_2$ \ $x_3 x_4$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
10	1	1	1	0
11	0	1	1	1
01	0	1	0	0

x_1, x_2, x_3, x_4

59

Пример 4: метод карт Карно (в классе ДНФ)

0	0	1	0
$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$		1	0
0	1	1	1
0	1	0	0

0	0	1	0
1	1	1	0
0	1	1	1
0	1	0	0

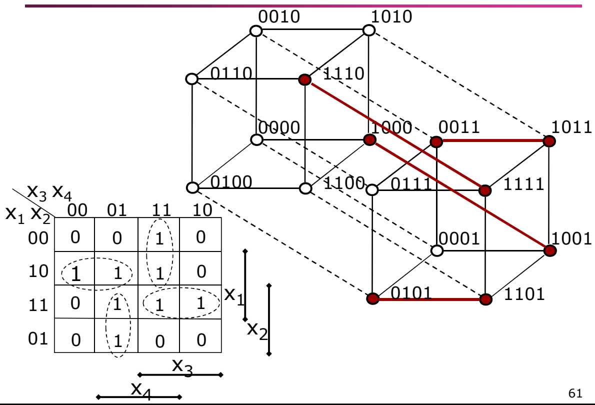
x_1, x_2, x_3, x_4

$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ $\bar{x}_2 x_3 x_4$ $x_2 \bar{x}_3 x_4$ $x_1 x_2 x_3$ $x_1 x_4$

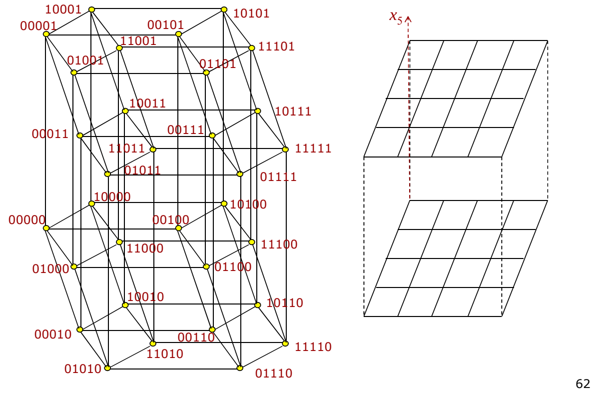
МДНФ: $x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3$

60

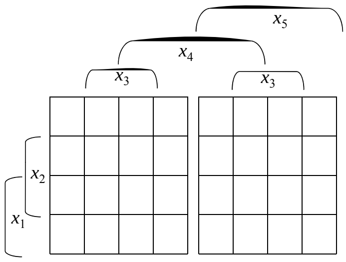
Иллюстрация оптимального решения

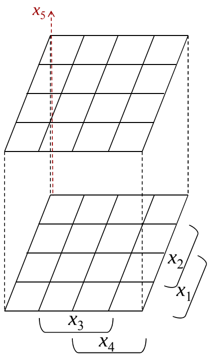


Развертка 5-мерного гиперкуба



Карта Карно для функции от 5-и аргументов





Карта Карно (слева) есть двумерная развёртка гиперкуба.

Пример 5: функция от 5-и аргументов

1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0

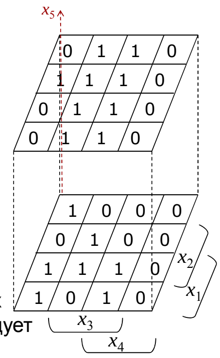
$M^1 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0
1	1	1	1	1

Здесь приведён пример булевой функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ заданной картой Карно и геометрически посредством троичной матрицы M^1. Эта функция имеет 8 простых импликантов (интервалов).
(Пример взят из книги А. Д. Закревского)

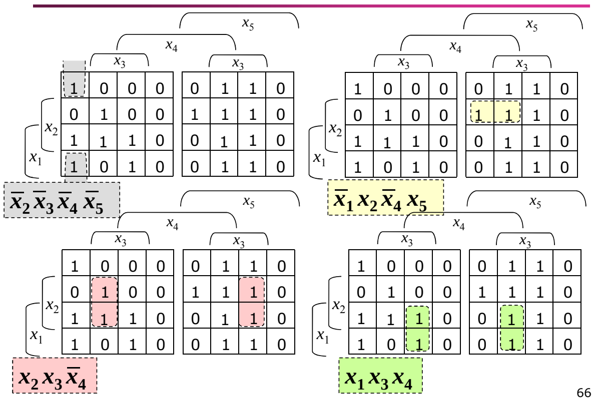
Карта Карно для функции от 5-и аргументов

1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0

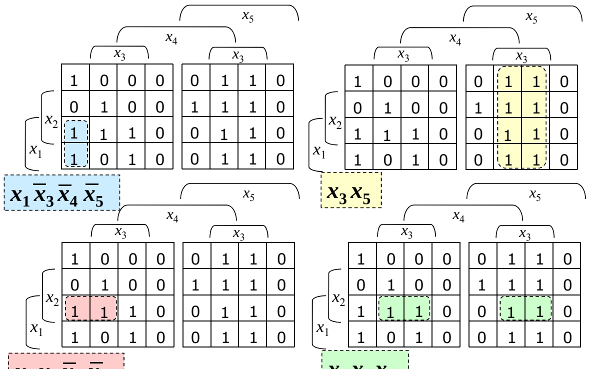


Порядок построения максимальных блоков (простых импликантов) следует из порядка развёртки гиперкуба.

Пример 5: простые импликанты



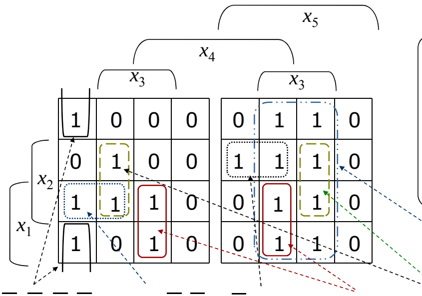
Пример 5: простые импликанты



$x_1\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5$ x_3x_5 $x_1x_2\bar{x}_4\bar{x}_5$ $x_1x_2x_4$

67

Пример 5: минимальная ДНФ



$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} - & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - & 0 & 0 \\ 0 & 1 & - & 1 & 1 \\ 1 & - & 1 & 1 & - \\ - & 1 & 1 & 0 & - \\ - & - & 1 & - & 1 \end{pmatrix}$$

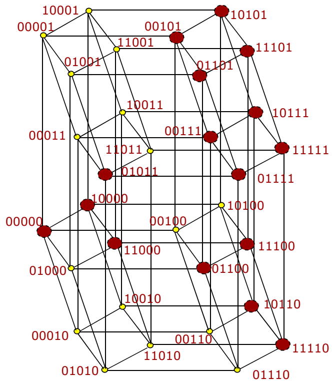
МДНФ

$$\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5 \vee x_1x_2\bar{x}_4\bar{x}_5 \vee \bar{x}_1x_2x_4x_5 \vee x_1x_3x_4 \vee x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_3x_5$$

Способность визуального восприятия позволяет нам легко увидеть, что миним-ное покрытие состоит из 6 импликантов.

68

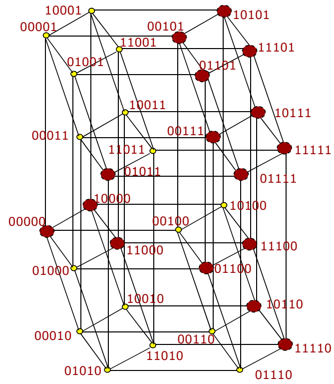
Пример 5: исходное задание $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

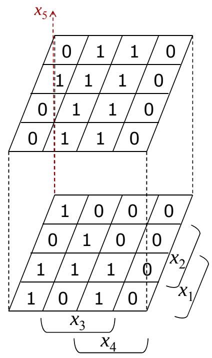


$$M^1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

69

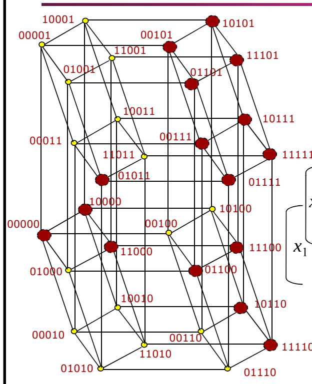
Карта Карно для функции от 5-и аргументов

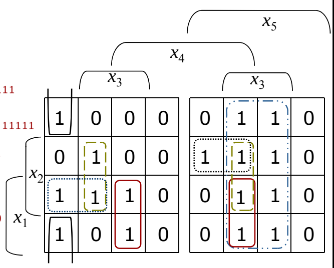




70

Пример 5: функция от 5-и аргументов





71

F.4.10. Минимизация в классе КНФ

Минимизация в классе КНФ заключается в том, что надо найти такую КНФ для заданной булевой функции, которая содержала бы или минимальное число букв - литералов (минимальная КНФ (МКНФ)). Очевидно, что такая КНФ будет содержать и минимальное число дизъюнкций (говорят, что является *кратчайшей* КНФ)

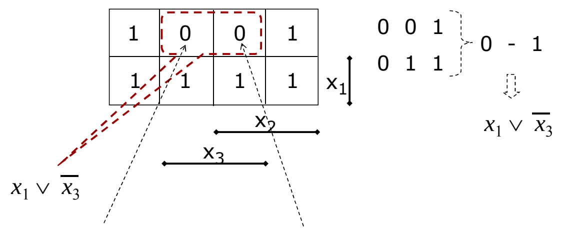
Аналогично ДНФ можно определить и *безызбыточную КНФ*.

72

Минимизация в классе КНФ

Закон склеивания: $(F \vee x)\,\&\,(F \vee \bar{x}) = F$

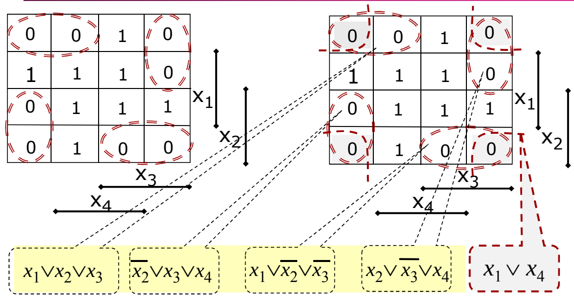
Закон поглощения: $(F \vee G)\,\&\,G = G$



$$(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)\ \&\ (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) = x_1 \vee \bar{x}_3$$

73

Пример: метод карт Карно (в классе КНФ)



МКНФ: $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$

74

F.4.11. Неполностью определённые б. ф-и.

Понятие неполностью определенной булевой функции.

Если значения некоторой булевой функции заданы на всех наборах значений аргументов, то она называется *полностью определенной (или всюду определенной) функцией.* Иногда значения б. ф. определены почему-либо не всюду, а лишь на некоторых наборах значений аргументов, и в этом случае она называется *частичной или неполностью определенной б. ф..*

Будем считать. что на остальных наборах такая функция принимает неопределенное значение (неизвестно, 0 или 1), обзначаемое символом « – ».

На практике существует два типа неопределённости: по входу и по выходу (либо входное воздействие в принципе не может поступить из внешней среды, либо реакция системы на него не важна).

75

Неполностью определённые б. ф-и.

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	1
0	0	1	-
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	-
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Неопределённость

Don't Care

Частичную функцию удобно рассматривать как множество полностью определенных функций получаемых соответствующим доопределением (делая все возможные подстановки вместо «-» 0 или 1).

Решая конкретную задачу, мы можем выбирать любую из них, «наиболее выгодную» для получения оптимального решения.

76

Неполностью определённые б. ф-и.

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	1
0	0	1	-
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	-
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

x_1	x_2	x_3	y1
0	0	0	1
0	0	1	**0**
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	**0**
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

x_1	x_2	x_3	y2
0	0	0	1
0	0	1	**0**
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	**1**
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

x_1	x_2	x_3	y3
0	0	0	1
0	0	1	**1**
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	**0**
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

x_1	x_2	x_3	y4
0	0	0	1
0	0	1	**1**
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	**1**
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

77

Неполностью определённые б. ф-и.

Неполностью определенная б. ф. может быть задана геометрически разбиением булева пространства ***M*** на три части ***M*** ^{1}, ***M*** ^{0} и ***M*** $^-$, образуемые наборами, на которых функция получает соответственно значение 1, 0 или «-».

$$M^0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad M^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad M^- = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Очевидно, чтобы описать такую функцию, достаточно задать лишь две из этих матриц (выбрав, например, те из них, которые содержат меньше элементов).

Формальное определение частичной б. функции:

$$\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n} \to \{0,1,-\}$$

$$\{0,1\}^n \to \{0,1,-\}$$

78

Минимизация неполностью опред. б. ф-и.

x_3 x_2 x_1

1	-(1)	1	0
-(1)	1	0	0

$\bar{x}_2$ $\bar{x}_1 \& x_3$

$$y = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \, x_3$$

79

Пример 2

$$M^- = \begin{array}{c} x_1\,x_2\,x_3\,x_4 \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \qquad M^1 = \begin{array}{c} x_1\,x_2\,x_3\,x_4 \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \qquad M^0 = \begin{array}{c} x_1\,x_2\,x_3\,x_4 \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

x_3 x_4 x_1 x_2

1	1	0	-
1	-	0	1
-	0	0	1
0	0	0	0

80

Минимизация частичной б. ф-и. (пример 2)

МКНФ

x_3 x_4 x_1 x_2

1	1	0	-(1)
1	-(0)	0	1
-(1)	0	0	1
0	0	0	0

$$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)\,(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)\,(x_1 \vee \bar{x}_2)$$

МДНФ

x_3 x_4 x_1 x_2

1	1	0	-(0)
1	-(1)	0	1
-	0	0	1
0	0	0	0

$$\bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_4$$

81

Минимизация частичной б. ф. (МакКласки)

Решение задачи минимизации методом МакКласки модифицируется следующим образом:

- Получение множества всех простых импликантов (максимальных интервалов). Чтобы найти все из них, доопределяем единицами все «-», т. е. находим максимальные интервалы в общей совокупности ***M¹*** и ***M⁻***.
- Однако при решении задачи покрытия обязательному покрытию подлежит лишь множество ***M¹***.

82

Замечания к решению примера (МДНФ)

Например, чтобы найти МДНФ методом МакКласки для частичной функции (пример 2)

$$M^- = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad M^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad M^0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

При генерации всех простых <u>импликант</u> надо исходить из

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Во втором этапе минимизации требуется решить задачу покрытия лишь относительно

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

83

Замечания к решению примера (МКНФ)

$$M^0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad M^- = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

При генерации всех <u>простых имплицентов</u> надо исходить из

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Во втором этапе минимизации требуется решить задачу покрытия лишь относительно

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

84

ПРИМЕР
РЕШЕНИЯ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

Задание

- Найти минимальные ДНФ и КНФ методом Карт Карно.
- Найти минимальные ДНФ и КНФ методом МакКласки.
- Преобразовать МКНФ и МДНФ к соответствующим формулам, в которых встречаются только операции конъюнкции и отрицания.
- Представить данную функцию в базисе $\{\uparrow\}$, т.е. «штрих Шеффера».
- Реализовать данную функцию с использованием только 2-х входового элемента И-НЕ.

Исходная функция

$x_1 x_3 \backslash x_2 x_4$	00	01	11	10
00	1	1	0	0
10	-	-	1	0
11	0	1	-	-
01	0	1	1	-

1	1	0	0
-	-	1	0
0	1	-	-
0	1	1	-

x_4, x_1, x_3, x_2

$$M^1 = \begin{Vmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&1 \\ 0&1&1&1 \\ 1&0&1&1 \\ 1&1&0&1 \end{Vmatrix} \quad M^- = \begin{Vmatrix} 0&1&1&0 \\ 1&0&0&0 \\ 1&0&0&1 \\ 1&1&1&0 \\ 1&1&1&1 \end{Vmatrix} \quad M^0 = \begin{Vmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&1&0&1 \\ 1&0&1&0 \\ 1&1&0&0 \end{Vmatrix}$$

Отмеченная карта Карно

0000: 1	0001: 1	0101: 0	0100: 0
1000: -	1001: -	1101: 1	1100: 0
1010: 0	1011: 1	1111: -	1110: -
0010: 0	0011: 1	0111: 1	0110: -

0: 1	1: 1	5: 0	4: 0
8: -	9: -	13: 1	12: 0
10: 0	11: 1	15: -	14: -
2: 0	3: 1	7: 1	6: -

x_4, x_1, x_3, x_2

Это представление рекомендуется использовать, чтобы лучше понять связь между различными методами минимизации.

Метод карт Карно - МДНФ

0: 1	1: 1	5: 0	4: 0
8: -	9: -	13: 1	12: 0
10: 0	11: 1	15: -	14: -
2: 0	3: 1	7: 1	6: -

$x_1 x_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_3 x_4$

0: 1	1: 1	5: 0	4: 0
8: 1	9: 1	13: 1	12: 0
10: 0	11: 1	15: 1	14: 0
2: 0	3: 1	7: 1	6: 0

Карта Карно соответствующей полностью определенной Булевой функции

Метод карт Карно - МКНФ

0: 1	1: 1	5: 0	4: 0
8: -	9: -	13: 1	12: 0
10: 0	11: 1	15: -	14: -
2: 0	3: 1	7: 1	6: -

0: 1	1: 1	5: 0	4: 0
8: 1	9: 1	13: 1	12: 0
10: 0	11: 1	15: 1	14: 0
2: 0	3: 1	7: 1	6: 0

$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)\ (\bar{x}_2 \vee x_4)\ (\bar{x}_3 \vee x_4)$

Метод Мак-Класки – МДНФ – этап I (1)

$$M^1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$M^- = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

0	(0)	0000
1	(1)	0001
	(8)	1000
2	(3)	0011
	(6)	0110
	(9)	1001
3	(7)	0111
	(11)	1011
	(13)	1101
	(14)	1110
4	(15)	1111

Метод Мак-Класки – МДНФ – этап I (2)

0	(0)	~~0000~~
1	(1)	~~0001~~
	(8)	~~1000~~
2	(3)	~~0011~~
	(6)	~~0110~~
	(9)	~~1001~~
3	(7)	~~0111~~
	(11)	~~1011~~
	(13)	~~1101~~
	(14)	~~1110~~
4	(15)	~~1111~~

0	(0/1)	~~000–~~
	(0/8)	~~–000~~
1	(1/3)	~~00–1~~
	(1/9)	~~–001~~
	(8/9)	~~100–~~
2	(3/7)	~~0–11~~
	(3/11)	~~–011~~
	(6/7)	~~011–~~
	(6/14)	~~–110~~
	(9/11)	~~10–1~~
	(9/13)	~~1–01~~
3	(7/15)	~~–111~~
	(11/15)	~~1–11~~
	(13/15)	~~11–1~~
	(14/15)	~~111–~~

0	(0/1/8/9)	**–00–**
	(0/8/1/9)	~~–00–~~
1	(1/3/9/11)	**–0–1**
	(1/9/3/11)	~~–0–1~~
2	(3/7/11/15)	**––11**
	(3/11/7/15)	~~––11~~
	(6/7/14/15)	**–11–**
	(6/14/7/15)	~~–11–~~
	(9/11/13/15)	**1––1**
	(9/13/11/15)	~~1––1~~

Метод Мак-Класки – МДНФ – этап II

Построение импликантной матрицы и решение задачи покрытия.

		0000	0001	0011	0111	1011	1101
–00–	(0/1/8/9)	**1**	**1**	0	0	0	0
–0–1	(1/3/9/11)	0	**1**	**1**	0	**1**	0
––11	(3/7/11/15)	0	0	**1**	**1**	**1**	0
–11–	(6/7/14/15)	0	0	0	**1**	0	0
1––1	(9/11/13/15)	0	0	0	0	**1**	**1**

		0011	0111	1011	1101
–0–1	(1/3/9/11)	**1**	0	**1**	0
––11	(3/7/11/15)	**1**	**1**	**1**	0
–11–	(6/7/14/15)	0	**1**	0	0
1––1	(9/11/13/15)	0	0	**1**	**1**

		0011	0111
–0–1	(1/3/9/11)	**1**	0
––11	(3/7/11/15)	**1**	**1**
–11–	(6/7/14/15)	0	**1**

Здесь имеем 2 обязательных импликанта, а третий простой импликант выбран исходя из «разумных» рассуждений.

Метод Мак-Класки – МДНФ

Таким образом все «единичные точки» покрываются тремя максимальными интервалами:

1––1 (9/11/13/15)

–00– (0/1/8/9)

––11 (3/7/11/15).

Соответствующая МДНФ будет:

$$x_1x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3x_4$$

Следует обратить внимание на то, что данное решение совпадает с найденным методом карт Карно.

Метод Мак-Класки – МКНФ – этап I (1)

$$M^0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$M^- = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

	(2)	0010
1	(4)	0100
	(8)	1000
	(5)	0101
	(6)	0110
2	(9)	1001
	(10)	1010
	(12)	1100
3	(14)	1110
4	(15)	1111

Метод Мак-Класки – МКНФ – этап I (2)

	(2)	~~0010~~
1	(4)	~~0100~~
	(8)	~~1000~~
	(5)	~~0101~~
	(6)	~~0110~~
2	(9)	~~1001~~
	(10)	~~1010~~
	(12)	~~1100~~
3	(14)	~~1110~~
4	(15)	~~1111~~

1	(2/6)	~~0–10~~
	(2/10)	~~–010~~
	(4/5)	**010–**
	(4/6)	~~01–0~~
	(4/12)	~~–100~~
	(8/9)	**100–**
	(8/10)	~~10–0~~
	(8/12)	~~1–00~~
2	(6/14)	~~–110~~
	(10/14)	~~1–10~~
	(12/14)	~~11–0~~
3	(14/15)	**111–**

1	(2/6/10/14)	**––10**
	(2/10/6/14)	~~––10~~
	(4/6/12/14)	**–1–0**
	(4/12/6/14)	~~–1–0~~
	(8/10/12/14)	**1––0**
	(8/12/10/14)	~~1––0~~

Метод Мак-Класки – МКНФ – этап II (1)

		0010	0100	0101	1010	1100
--10	(2/6/10/14)	**1**	0	1	**1**	0
010–	(4/5)	0	**1**	**1**	0	0
–1–0	(4/6/12/14)	0	**1**	0	0	**1**
~~100–~~	~~(8/9)~~	0	0	0	0	0
1––0	(8/10/12/14)	0	0	0	**1**	**1**
~~111–~~	~~(14/15)~~	0	0	0	0	0

		0100	0101	1100
010–	(4/5)	**1**	**1**	0
–1–0	(4/6/12/14)	**1**	0	**1**
1––0	(8/10/12/14)	0	0	**1**

97

Метод Мак-Класки – МКНФ – этап II (2)

		1100
–1–0	(4/6/12/14)	**1**
1––0	(8/10/12/14)	**1**

		1100
–1–0	(4/6/12/14)	**1**
1––0	(8/10/12/14)	**1**

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)(\bar{x}_3 \vee x_4)$$

или

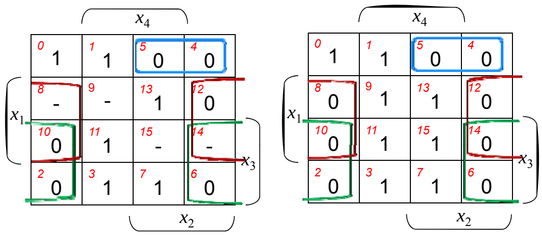
$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_3 \vee x_4)$$

Следует обратить внимание на то, что здесь мы имем два раноценных решения. Одно из них совпадает с рещеннием найденным ранее методом карт Карно.

Тем не менее мы должны убедиться, что и второе решение может быть получено методом карт Карно (см. след. слайд).

98

Получение альтернативного решения



$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)\ (\bar{x}_1 \vee x_4)\ (\bar{x}_3 \vee x_4)$$

Здесь мы доопределили функцию на наборе аргументов « 1, 0, 0 » (клетка 8) до 0.

99

Преобразование к базису {&, ~}

Преобразование МДНФ:

$$x_1x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3x_4 =$$

$$= (x_1 \vee x_3)x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 =$$

$$= \overline{\overline{(x_1 \vee x_3)x_4}\,\overline{\bar{x}_2\bar{x}_3}} =$$

$$= \overline{\overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3}x_4}\,\overline{\bar{x}_2\bar{x}_3}}$$

Преобразование МКНФ:

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_3 \vee x_4) =$$

$$= \left(\overline{x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3}\right)\left(\overline{\bar{x}_1 \vee x_4}\right)\left(\overline{\bar{x}_3 \vee x_4}\right) =$$

$$= \left(\bar{x}_1\, x_1\, \bar{x}_3\right)\left(x_1\, \bar{x}_4\right)\left(x_3\, \bar{x}_4\right)$$

100

Преобразование к базису {&, ~}

Преобразование МДНФ: $x_1x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3x_4 =$

$$= (x_1 \vee x_3)x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$$

$$= \overline{\overline{(x_1 \vee x_3)x_4}\,\overline{\bar{x}_2\bar{x}_3}} =$$

$$= \overline{\overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3}x_4}\,\overline{\bar{x}_2\bar{x}_3}}$$

Преобразование МКНФ: $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_3 \vee x_4) =$

$$\left(\overline{x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3}\right)\left(\overline{\bar{x}_1 \vee x_4}\right)\left(\overline{\bar{x}_3 \vee x_4}\right) =$$

$$= \left(\bar{x}_1\, x_1\, \bar{x}_3\right)\left(x_1\, \bar{x}_4\right)\left(x_3\, \bar{x}_4\right)$$

101

Преобразование к базису {↑}

$$\overline{\overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3}x_4}\,\overline{\bar{x}_2\bar{x}_3}} =$$

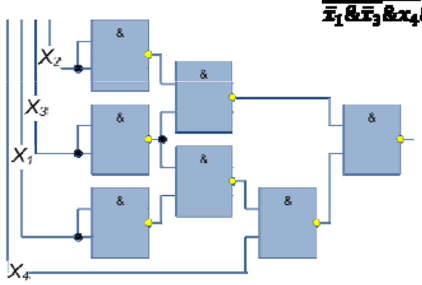
$$= \left(((x_1 \uparrow x_1) \uparrow (x_3 \uparrow x_3)) \uparrow x_4\right) \uparrow ((x_2 \uparrow x_2) \uparrow (x_3 \uparrow x_3))$$

102

Представление (реализация) схемой

В интересах оптимальности за исходную лучше взять МДНФ.

$$\overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3x_4}\,\overline{\bar{x}_2\bar{x}_3}}$$
$$=$$
$$\overline{\overline{\bar{x}_1\&\bar{x}_3\&x_4}\&\overline{\bar{x}_2\&\bar{x}_3}}$$



Верификация методом истинностных таблиц

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3}$	$\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3x_4}$	$\overline{\bar{x}_2\bar{x}_3}$	$\overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3x_4}\,\overline{\bar{x}_2\bar{x}_3}}$	$f(x)$
(0)	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
(1)	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
(2)	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0
(3)	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
(4)	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0
(5)	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
(6)	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	–
(7)	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
(8)	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	–
(9)	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	–
(10)	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
(11)	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1
(12)	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
(13)	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1
(14)	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	–
(15)	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	–